Gebrauch der Lambertschen W-Funktion (Omegafunktion)

W(x) ist eine inverse Funktion zu f(x) = $x \cdot e^x$.
$x \cdot e^x = y$ hat damit die Lösung **$x = W(y)$**.
f hat ihr globales Minimum bei (-1 | 1/e). W(y) ist für $y \geq -1/e$ die obere der beiden Umkehrfunktionen zu f.
$W(x \cdot e^x) = x$ für $x \geq -1$

Beispiel 1:	**Beispiel 1a:**	**Beispiel 2:**
$x = -\ln(x)$ $e^x = 1/x$ $x \cdot e^x = 1$ $x = W(1) = \mathbf{0{,}5671432904.. = \Omega}$	$x = -2 \cdot \ln(x)$ $e^x = x^{-2}$ $e^x \cdot x^2 = 1$ $e^{x/2} \cdot x = 1$ $e^{x/2} \cdot x/2 = ½$ $x/2 = W(½)$, $x = 2 \cdot W(½) = 0{,}7034\ldots$	$2-x = \ln(x)$ $e^{2-x} = x$ $e^2 \cdot e^{-x} = x$ $e^2 = x \cdot e^x$ $x = W(e^2) = 1{,}5571\ldots$

Beispiel 3 (Quasi)-Substitution:	
$\ln(x) = -x^2$ $\ln(x) + e^{2 \cdot \ln(x)} = 0$ $\ln(x) \cdot e^{-2 \cdot \ln(x)} + 1 = 0$ $-2 \cdot \ln(x) \cdot e^{-2 \cdot \ln(x)} = 2$	… $-2 \cdot \ln(x) = W(2)$ $x = \exp\left(-\frac{W(2)}{2}\right) = 0{,}6529\ldots$

Beispiel 3a:	
$x^x = 3$ $\exp(x \cdot \ln(x)) = 3$ $x \cdot \ln(x) = \ln(3)$ $z := \ln(x)$ $e^z \cdot z = \ln(3)$ $z = W(\ln(3))$ $x = \exp(W(\ln(3)))$ $x = \frac{\ln(3)}{W(\ln(3))} = 1.825\ldots$	Aus $W(a) \cdot e^{W(a)} = b$ folgt $W(a) = W(b) \rightarrow a = b \rightarrow$ $W(a) \cdot e^{W(a)} = a$ $e^{W(a)} = \frac{a}{W(a)}$

Beispiel 3b:

$x \cdot \ln(x) = a$ hat damit die Lösung $x = \frac{a}{W(a)}$

Mit $z := \ln(x)$ folgt $e^z \cdot z = a$ und $z = W(a) \rightarrow$ $W(x \cdot \ln(x)) = \ln(x)$, $x \geq 1/e$ (3)

Beispiel 4:	**Beispiel 4a:**
$x + e^x = a$ $e^x = a - x$ $1 = (a-x) \cdot e^{-x}$ $e^a = (a-x) \cdot e^{a-x}$ $a-x = W(e^a)$ $x = a - W(e^a)$	$e \cdot x + e^{-x} = 0$ $e \cdot x \cdot e^x + 1 = 0$ $x \cdot e^x = -1/e$ $x = \mathbf{W(-1/e) = -1}$ Siehe auch Beispiel 8

Untere Umkehrfunktion

f ist streng monoton für $x > -1$. Daher existiert noch eine zweite Umkehrfunktion $x = Wu(y)$ für das schmale Intervall $y \in [-1/e\,;\,0)$, was Funktionswerte im Bereich $(-\infty\,;\,-1]$ liefert. Beide Umkehrfunktionen sind in diesem Intervall erklärt.
Ist $x_1 = W(y)$ eine Lösung mit $y<0$, so ist $x_2 = Wu(y)$ folglich die zweite Lösung.

Beispiel 5:	**Beispiel 6:**
$x\cdot\exp(-x/2) = 1/5$ $-x/2\cdot\exp(-x/2) = -1/10$ $-x/2 = W(-1/10)$ $x_1 = -2\cdot W(-1/10) = 0{,}2236\ldots$ $x_2 = -2\cdot Wu(-1/10) = 7{,}1543\ldots$	$\ln(3x) = x$ $3x = e^x$ $-x\cdot e^{-x} = -1/3$ $x_{1/2} = -W[u](-1/3) \leftrightarrow$ $x_1 = -W(-1/3) = 0{,}6190\ldots$, $x_2 = -Wu(-1/3) = 1.5121\ldots$

Beispiel 7:	**Beispiel 7a, 7b:**
$\ln(x) = ax+b$ $\ln(x) - ax = b$ $x \cdot e^{-ax} = e^b$ $-ax \cdot e^{-ax} =$ $-ax = W(-a \cdot e^b)$ $x_{1/2} = -1/a \cdot W[u](-a \cdot e^b)$	$\ln(x) = x - 2$ $x_1 = -W(-1/e^2) = 0{,}15859\ldots$ $x_2 = -Wu(-1/e^2) = 3.1461\ldots$ $\ln(x) = x - 1$ $x = -W(-1/e) = 1$ In diesem Grenzfall fallen beide Lösungen zusammen.

Beispiel 8:	**Beispiel 8a:**
$e^x = a\cdot x$ $1 = a\cdot x \cdot e^{-x}$ $-1/a = -x \cdot e^{-x}$ $x_1 = -W(-1/a)$ $x_2 = -Wu(-1/a)$, $a>e$	$a^x = b\cdot x$ $1 = b\cdot x\cdot\exp(-x\cdot\ln(a))$ $-\ln(a)/b = -x\cdot\ln(a)\cdot\exp(-x\cdot\ln(a))$ $-x\cdot\ln(a) = W(-\ln(a)/b)$ $x_{1/2} = \frac{-W[u](-\frac{\ln(a)}{b})}{\ln(a)}$

Beispiel 9:	**Beispiel 9a:**
$e^x = a\cdot x + b$ $1 = (a\cdot x + b)\cdot e^{-x}$ $-\frac{1}{a} = \left(-x - \frac{b}{a}\right)\cdot e^{-x}$ $-\frac{1}{a}\cdot e^{-\frac{b}{a}} = \left(-x - \frac{b}{a}\right)\cdot e^{-x-\frac{b}{a}}$ $-x - \frac{b}{a} = W\left(-\frac{1}{a}\cdot e^{-\frac{b}{a}}\right)$ $x_{1/2} = -\frac{b}{a} - W[u]\left(-\frac{1}{a}\cdot e^{-\frac{b}{a}}\right)$	Für $b = 1$ und $a > 1$ ist $e^x = a\cdot x + 1$ $x_1 = -\frac{1}{a} - W\left(-\frac{1}{a}\cdot e^{-\frac{1}{a}}\right)$ $x_1 = -\frac{1}{a} - \left(-\frac{1}{a}\right) = 0$ Entsprechendes gilt für Wu und $a < 1$ → $e^x = a\cdot x + 1$ hat stets eine Lösung $x = 0$

Beispiel 9c: Für $e^{-x} = a\cdot x + b$ lautet die Lösung $x_{1/2} = -\frac{b}{a} + W[u]\left(\frac{1}{a}\cdot e^{\frac{b}{a}}\right)$

Beispiel 10: Fallunterscheidung	**Beispiel 10a:**
$x^4 = e^x$ $x^4 \cdot e^{-x} = 1$ (i) $x \cdot e^{-x/4} = 1$ $-x/4 \cdot e^{-x/4} = -¼$ $x_1 = -4 \cdot W(-¼) = 1{,}4296\ldots$ $x_2 = -4 \cdot Wu(-¼) = 8{,}6131\ldots$ (ii) $-x \cdot e^{-x/4} = 1$ $-x/4 \cdot e^{-x/4} = ¼$ $x_3 = -4 \cdot W(¼) = -0.8155\ldots$	$x^2 \cdot e^{-x} = 0{,}01$ (i) $x \cdot e^{-x/2} = 0{,}1$ $-x/2 \cdot e^{-x/2} = -1/20$ $x_1 = -2 \cdot W(-1/20) = 0{,}1054\ldots$ $x_2 = -2 \cdot Wu(-1/20) = 8{,}9995\ldots$ (ii) $-x \cdot e^{-x/2} = 0{,}1$ $-x/2 \cdot e^{-x/2} = 1/20$ $x_3 = -2 \cdot W(1/20) = -0{,}0953\ldots$

Beispiel 11:

Gesucht ist eine Funktion, für die gilt $x^y = y^x$

$x^{1/x} = y^{1/y} =: z$

$x = z^x$

$x = \exp(x \cdot \ln(z))$

$x \cdot \exp(-x \cdot \ln(z)) = 1$

$-x \cdot \ln(z) \cdot \exp(-x \cdot \ln(z)) = -\ln(z)$

$-x \cdot \ln(z) = W(-\ln(z))$

$$x = \frac{-W(\ln(z))}{\ln(z)}$$

$$x = \begin{cases} \frac{-y}{\ln(y)} \cdot W\left(\frac{-\ln(y)}{y}\right), & x \geq e \\ \frac{-y}{\ln(y)} \cdot Wu\left(\frac{-\ln(y)}{y}\right), & 1 < x < e \end{cases}$$

Direktlink:

http://www.thkoehler.de/midnightblue/m_kdb.htm?f=(x<2.7183)? (-x/ln(x)*wu(-ln(x)/x)) : (-x/ln(x)*w(-ln(x)/x))&xmin=-1&xmax=9&ymin=-1&ymax=9&x0=2.718281828459045

Bemerkung:

Für $0 < x < e$ wäre $W\left(\frac{-\ln y}{y}\right) = W\left(\frac{1}{y} \cdot \ln\frac{1}{y}\right) = W\left(\ln\frac{1}{y} \cdot \exp\left(\ln\frac{1}{y}\right)\right) = \ln\frac{1}{y}$ analog zu (3).

Entsprechendes gilt für $x > e$ und Wu.

Die Lösung der Ausgangsgleichung ist damit nicht vollständig.