

Rückzahlung eines Kredites in Raten

Ein Kredit K (Nettodarlehensbetrag) soll in n identischen Raten und Zeitabständen innerhalb von t Jahren zurückgezahlt werden. Der eff. Jahreszins beträgt $p\%$.

Wachstumsfaktor $a := 1 + p\%$.

Im allgemeinen sind es Monatsraten und $12t = n$.

Berechnet wird der Rückzahlungsbetrag R (Bruttodarlehensbetrag) bzw. der (*tatsächliche*) eff. Jahreszins p .

Herleitung

Als Beispiel soll in 3 Raten zurückgezahlt werden.

$$R_3 = \frac{K}{3} \cdot a^{\frac{t}{3}} + \frac{K}{3} \cdot a^{\frac{2t}{3}} + \frac{K}{3} \cdot a^t = \frac{K}{3} \left(a^{\frac{t}{3}} + a^{\frac{2t}{3}} + a^t \right)$$

$$\text{Für } n \text{ Raten gilt } R_n = \frac{K}{n} \cdot \sum_{i=1}^n a^{\frac{t}{n} \cdot i} \quad (1)$$

Mit $b = a^{\frac{t}{n}}$ leitet sich die Formel für die n -te Partialsumme $S_n = \sum_{i=1}^n b^i$ wie folgt her:

$$S_n = b + b^2 + \dots + b^n$$

$$S_n \cdot b = b^2 + \dots + b^n + b^{n+1}$$

$$S_n \cdot b - S_n = b^{n+1} - b$$

$$S_n (b - 1) = b^{n+1} - b = b (b^n - 1)$$

$$S_n = b \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1}. \text{ Daraus folgt}$$

$$R_n = \frac{K}{n} \cdot a^{\frac{t}{n}} \cdot \frac{a^t - 1}{a^{\frac{t}{n}} - 1} \quad (2) \text{ und für Monatsraten } R_n = \frac{K}{n} \cdot a^{\frac{1}{12}} \cdot \frac{a^t - 1}{a^{\frac{1}{12}} - 1} \quad (2a), (t = n/12)$$

Beispiel:

Ein Kredit von 3500 € soll über 72 mon getilgt werden mit 6% eff. Jahreszins.

$$\text{Die Rückzahlung } R \text{ beträgt } \frac{3500}{72} \cdot 1,06^{\frac{1}{12}} \cdot \frac{1,06^6 - 1}{1,06^{\frac{1}{12}} - 1} = 4200,00 \text{ €}.$$

Die Monatsrate beträgt demnach **58,33 €**

Berechnung des eff. Jahreszinses

Nun soll die Monatsrate angenommen 64,72 € betragen. **Wie hoch ist der Zinssatz?**

Hier ist die Prospekthaftung mitunter sehr großzügig ausgelegt.

Wir lösen die Gleichung $R_n - \frac{K}{n} \cdot a^{\frac{1}{12}} \cdot \frac{a^t - 1}{a^{\frac{1}{12}} - 1} = 0$ numerisch, indem wir den Ausdruck als

Funktion auffassen und im Programm http://www.thkoehler.de/midnightblue/m_kdb.htm a (also $1 + p\%$) durch x ersetzen:

$$f(x) = 64,72 \cdot 72 - 3500/72 \cdot x^{(1/12)} \cdot (x^6 - 1) / (x^{(1/12)} - 1)$$

oder Beispiel gleich aufrufen:

$$\text{http://www.thkoehler.de/midnightblue/m_kdb.htm?f=64,72*72-3500/72*x^(1/12)*(x^6-1)/(x^(1/12)-1)}$$

Für 64,72 € Rate, 72 mon, 3500 € Kredit, $72/12=6$ Jahre Rückzahlung.

Die Nullstelle $X_1 = 1.0942899308816203 = a = 1 + p\%$ liefert $p = 9,429\%$ eff. Jahreszins

In einer Werbung wurde dieser Kredit als 5,99% eff. Jahreszins angeboten. Oh je...

Einfluss der Ratenanzahl

Wie ändert sich der Rückzahlungsbetrag R_n , wenn in Jahres-, Monats- oder Tagesraten... zurückgezahlt wird?

Wir nehmen das obige Beispiel und zahlen $K = 3500$ € mit 6% eff. Jahreszins über $t = 6$ Jahre in n Raten zurück. Gleichung (2) liefert für

$$n = 1 \text{ (Einmalzahlung)} R_1 = K \cdot 1,06^6 = \mathbf{4964,82 \text{ €}},$$

$$n = 6 \text{ (Jahresraten)} R_6 = \mathbf{4313,07 \text{ €}},$$

$$n = 72 \text{ (Monatsraten, s.o.) } R_{72} = \mathbf{4200,00 \text{ €}}.$$

Es wird billiger, da nach immer kürzerer Zeit nur noch Teilbeträge anstehen. Lohnt sich ein Dauerauftrag für **Tagesraten**?

Beim Zinsjahr mit 360 Tagen ergibt das $n = 6 \cdot 360 = 2160$ Tagesraten, $t/n = 1/360$.

$$R_{2160} = \frac{3500}{2160} \cdot 1,06^{\frac{1}{360}} \cdot \frac{1,06^6 - 1}{1,06^{\frac{1}{360}} - 1} = \mathbf{4190,16 \text{ €}}, \text{ nur knapp 10 € weniger als bei Monatsraten}$$

und dicke Stapel an Kontoauszügen.

Auch eine **stetige Rückzahlung** würde der Mühe nicht Lohnen. Nach (2) ist

$$R_n = \frac{K}{n} \cdot \exp\left(\frac{t}{n} \cdot \ln(a)\right) \cdot \frac{a^t - 1}{\exp\left(\frac{t}{n} \cdot \ln(a)\right) - 1}.$$

Für sehr große n vereinfachen wir

$$R_n^* = \frac{K}{n} \cdot \left(1 + \frac{t}{n} \cdot \ln(a)\right) \cdot \frac{a^t - 1}{1 + \frac{t}{n} \cdot \ln(a) - 1} = K \cdot \left(1 + \frac{t}{n} \cdot \ln(a)\right) \cdot \frac{a^t - 1}{t \cdot \ln(a)}. \text{ Daraus folgt}$$

$$R_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n^* = K \cdot \frac{a^t - 1}{t \cdot \ln(a)} \quad (3).$$

Im Beispiel beträgt die stetige Rückzahlung

$$R_\infty = \mathbf{4189,82 \text{ €}}, \text{ nur noch 0,34 € Unterschied zu Tagesraten.}$$

Der Grenzwert (3) ergibt sich auch aus (1):

$$R_\infty = \frac{K}{n} \int_0^n a^{\frac{t}{n}x} dx = \frac{K}{n} \int_0^n \exp\left(\frac{t}{n} \cdot x \cdot \ln(a)\right) dx = \frac{K}{t \cdot \ln(a)} \cdot \left. a^{\frac{t}{n}x} \right|_0^n.$$

Fazit: Wenn es schon sein muss, dann bleiben Sie bei Monatsraten 😊