Rückzahlung eines Kredites in Raten

Ein Kredit K (Nettodarlehensbetrag) soll in n identischen Raten und Zeitabständen innerhalb von t Jahren zurückgezahlt werden. Der eff. Jahreszins beträgt p%.
Wachstumsfaktor $a := 1 + p\%$.
Im allgemeinen sind es Monatsraten und $12t = n$.

Berechnet wird der Rückzahlungsbetrag R (Bruttodarlehensbetrag) bzw. der (*tatsächliche*) eff. Jahreszins p.

Herleitung

Als Beispiel soll in 3 Raten zurückgezahlt werden.

$$R_3 = \frac{K}{3} \cdot a^{\frac{t}{3}} + \frac{K}{3} \cdot a^{\frac{2}{3}t} + \frac{K}{3} \cdot a^{t} = \frac{K}{3}\left(a^{\frac{t}{3}1} + a^{\frac{t}{3}2} + a^{\frac{t}{3}3} \right)$$

Für n Raten gilt $R_n = \frac{K}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a^{\frac{t}{n}i}$ (1)

Mit $b = a^{\frac{t}{n}}$ leitet sich die Formel für die n-te Partialsumme $S_n = \sum_{i=1}^{n} b^i$ wie folgt her:

$S_n = b + b^2 + \ldots + b^n$
$S_n \cdot b = b^2 + \ldots + b^n + b^{n+1}$
$S_n \cdot b - S_n = b^{n+1} - b$
$S_n (b - 1) = b^{n+1} - b = b\,(b^n - 1)$
$S_n = b \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1}$. Daraus folgt

$$\boxed{R_n = \frac{K}{n} \cdot a^{\frac{t}{n}} \cdot \frac{a^t - 1}{a^{\frac{t}{n}} - 1} \text{ (2) und für Monatsraten } R_n = \frac{K}{n} \cdot a^{\frac{1}{12}} \cdot \frac{a^t - 1}{a^{\frac{1}{12}} - 1} \text{ (2a) , } (t = n/12)}$$

Beispiel:

Ein Kredit von 3500 € soll über 72 mon getilgt werden mit 6% eff. Jahreszins.

Die Rückzahlung R beträgt $\frac{3500}{72} 1{,}06^{\frac{1}{12}} \cdot \frac{1{,}06^6 - 1}{1{,}06^{\frac{1}{12}} - 1}$ = **4200,00 €**.

Die Monatsrate beträgt demnach **58,33 €**

Berechnung des eff. Jahreszinses

Nunn soll die Monatsrate angenommen 64,72 € betragen. **Wie hoch ist der Zinssatz**?
Hier ist die Prospekthaftung mitunter sehr großzügig ausgelegt.

Wir lösen die Gleichung $R_n - \frac{K}{n} \cdot a^{\frac{1}{12}} \cdot \frac{a^t - 1}{a^{\frac{1}{12}} - 1} = 0$ numerisch, indem wir den Ausdruck als Funktion auffassen und im Programm http://www.thkoehler.de/midnightblue/m_kdb.htm a (also $1+p\%$) durch x ersetzen:

f(x) = 64.72*72-3500/72*x^(1/12)*(x^6-1)/(x^(1/12)-1)

oder Beispiel gleich aufrufen:
http://www.thkoehler.de/midnightblue/m_kdb.htm?f=64.72*72-3500/72*x^(1/12)*(x^6-1)/(x^(1/12)-1)

Für 64,72 € Rate, 72 mon, 3500 € Kredit, 72/12=6 Jahre Rückzahlung.
Die Nullstelle X_1 = 1.0942899308816203 = a = $1+p\%$ liefert $\boldsymbol{p}$ **= 9,429%** eff. Jahreszins
In einer Werbung wurde dieser Kredit als 5,99% eff. Jahreszins angeboten. Oh je…

Einfluss der Ratenanzahl

Wie ändert sich der Rückzahlungsbetrag R_n, wenn in Jahres-, Monats- oder Tagesraten… zurückgezahlt wird?
Wir nehmen das obige Beispiel und zahlen $K = 3500$ € mit 6% eff. Jahreszins über $t = 6$ Jahre in n Raten zurück. Gleichung (2) liefert für
$n = 1$ (Einmalzahlung) $R_1 = K \cdot 1{,}06^6 =$ **4964,82 €,**
$n = 6$ (Jahresraten) $R_6 =$ **4313,07 €**,
$n = 72$ (Monatsraten, s.o.) $R_{72} =$ **4200,00 €.**
Es wird billiger, da nach immer kürzerer Zeit nur noch Teilbeträge anstehen. Lohnt sich ein Dauerauftrag für **Tagesraten**?
Beim Zinsjahr mit 360 Tagen ergibt das $n = 6 \cdot 360 = 2160$ Tagesraten, t/n = 1/360.

$$R_{2160} = \frac{3500}{2160} \cdot 1{,}06^{\frac{1}{360}} \cdot \frac{1{,}06^6 - 1}{1{,}06^{\frac{1}{360}} - 1} = \mathbf{4190{,}16\ €}$$, nur knapp 10 € weniger als bei Monatsraten

und dicke Stapel an Kontoauszügen.

Auch eine **stetige Rückzahlung** würde der Mühe nicht Lohnen. Nach (2) ist

$$R_n = \frac{K}{n} \cdot \exp\left(\frac{t}{n} \cdot \ln(a)\right) \cdot \frac{a^t - 1}{\exp\left(\frac{t}{n} \cdot \ln(a)\right) - 1}.$$

Für sehr große n vereinfachen wir

$$R_n^* = \frac{K}{n} \cdot \left(1 + \frac{t}{n} \cdot \ln(a)\right) \cdot \frac{a^t - 1}{1 + \frac{t}{n} \cdot \ln(a) - 1} = K \cdot \left(1 + \frac{t}{n} \cdot \ln(a)\right) \cdot \frac{a^t - 1}{t \cdot \ln(a)}$$. Daraus folgt

$$R_\infty = \lim_{n \to \infty} R_n^* = K \cdot \frac{a^t - 1}{t \cdot \ln(a)} \quad (3).$$

Im Beispiel beträgt die stetige Rückzahlung
$R_\infty =$ **4189,82 €**, nur noch 0,34 € Unterschied zu Tagesraten.
Der Grenzwert (3) ergibt sich auch aus (1):

$$R_\infty = \frac{K}{n} \int_0^n a^{\frac{t}{n}x} dx = \frac{K}{n} \int_0^n \exp\left(\frac{t \cdot x}{n} \cdot \ln(a)\right) dx = \frac{K}{t \cdot \ln(a)} \cdot a^{\frac{t \cdot x}{n}} \Big]_0^n.$$

Fazit: Wenn es schon sein muss, dann bleiben Sie bei Monatsraten ☺