Integral von Nullstelle zu Nullstelle

Haben Sie sich jemals gefragt, wie man **"1/2"** definiert?

Hier ist die **Antwort:**
Der Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = x \cdot \sin(2 \cdot x^2)$ und der x-Achse, begrenzt durch zwei benachbarte Nullstellen.

Hintergrund:
Die Sinusfunktion $\sin(x)$ hat Nullstellen bei $k \cdot \pi$ für ganzzahlige k.
Aus $2 \cdot x^2 = k \cdot \pi$ folgt für die Nullstellen von f

$$x_k = \sqrt{\frac{k}{2} \cdot \pi} \quad , \; k \in \mathbf{G} .$$

Der gesuchte Flächeninhalt ergibt sich aus dem Integral über f von einer zur nächsten Nullstelle.

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} x \cdot \sin(2x^2)dx = -\frac{1}{4}\cos(2x^2)\Big]_{x_k}^{x_{k+1}} = -\frac{1}{4}\left[\cos\left((k+1) \cdot \pi\right) - \cos\left(k \cdot \pi\right)\right] \text{ wegen } 2 \cdot x_k^2 = k \cdot \pi.$$

Wenn $\cos\left((k+1) \cdot \pi\right) = 1$ ist, dann ist $\cos\left((k) \cdot \pi\right) = -1$ und umgekehrt. Somit ist die Differenz $\left[\cos\left((k+1) \cdot \pi\right) - \cos\left(k \cdot \pi\right)\right]$ vom Betrag 2 (vom Min. zum Max. der Kosinusfunktion) und die gesuchte Fläche

$$A = \left| -\frac{1}{4}\left[\cos\left((k+1) \cdot \pi\right) - \cos\left(k \cdot \pi\right)\right] \right| = \frac{1}{2}$$

Test:
Geben Sie im Programm http://www.thkoehler.de/midnightblue/m_kdb.htm
ein f(x) = x*sin(2x^2)
ein beliebiges x-Intervall ein (z.B. $x_{min} = 3$) und scrollen sie zu

Integral von X_1 = 3.0699801238394655 bis X_2 = 3.3159575219782713:
I = 0.5 = ½

Direkteingabe:
http://www.thkoehler.de/midnightblue/m_kdb.htm?f=x*sin(2x^2)&xmin=3&xmax=4

Tipp:
Stellen Sie kleine x-Intervalle ein, da der Rechenaufwand wegen der vielen Nullstellen, Extrema usw. sehr groß wird.

Viel Spaß beim Probieren…